PRODUCTO VECTORIAL Y MIXTO- **VECTORES 3**

1. Halla el producto vectorial de $\vec{a}$ (2,-1,1) y $\vec{b}$ (-1,-1,2), así como un vector unitario y perpendicular a los dos.

2. Halla el/ los valores de m para que los vectores $\vec{u}(0,1,3)$, $\vec{v}(0,2,1)$ y $\vec{w}(m,1,0)$ sean coplanarios. ¿Cuánto vale el volumen del paralelepípedo formado por los tres vectores para ese valor de m hallado anteriormente? Razona la respuesta.

3. Sean los vectores $\vec{u}(1,1,3)$, $\vec{v}(2,2,-1)$ y $\vec{w}(0,1,0)$. Calcula los productos mixtos: $[2\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$; $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}+\vec{v}]$;

4. Sean los vectores $\vec{u}(-1,2,0)$ y $\vec{v}(3,-3,-1)$, calcula:

El área del paralelogramo formado por $\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{u}-\vec{v}$

5. Determinar p y q para que el vector $\vec{a}(1,-p,q)$ sea ortogonal a los vectores $\vec{b}(3,1,-1)$ y $\vec{c}(2,-3,1)$

6. Halla el lugar geométrico donde se encuentran todos los vectores $\vec{u}(a,b,c)$ perpendiculares al vector $\vec{v}(3,-3,-1)$.

SOLUCIONES A LA FICHA **VECTORES 3**

1. Para calcular el producto vectorial de $\vec{a}$ (2,-1,1) y $\vec{b}$ (-1,-1,2), recordamos que es un vector cuyas coordenadas vienen dadas por $\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right) = \left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}\right) = (-1,-5,-3)$

Un vector unitario y perpendicular a los dos sería este producto vectorial de módulo 1, así pues le calculamos su módulo: $\left|\vec{a} \; x \; \vec{b}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-5)^2 + (-3)^2} = \sqrt{35}$, el vector unitario y perpendicular es:

$$\boxed{\left(\frac{-1}{\sqrt{35}}, \frac{-5}{\sqrt{35}}, \frac{-3}{\sqrt{35}}\right)}$$

---

2. Para que los vectores $\vec{u}(0,1,3)$, $\vec{v}(0,2,1)$ y $\vec{w}(m,1,0)$ sean coplanarios, uno de ellos tiene que ser combinación lineal de los demás, es decir los tres linealmente dependientes, calculamos pues su determinante: $\begin{vmatrix} 0 & 0 & m \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5m \Rightarrow -5m = 0 \Rightarrow m = 0$

Si m =0, los tres vectores son coplanarios y por tanto no forman paralelepípedo, así pues el volumen es cero.

3.

Calculamos $\left[2\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right] = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 14$, $\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} + \vec{v}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$ que está claro ya que la tercera fila es la suma o combinación lineal de las otras dos, por tanto su determinante es cero.

4.

El área del paralelogramo formado por $\vec{u} + \vec{v}$ =(2,-1,-1) y $\vec{u} - \vec{v}$ =(-4,5,1) es $\left|\left(\vec{u} + \vec{v}\right) x \left(\vec{u} - \vec{v}\right)\right| =$

$= \left|\left(\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}\right)\right| = \left|(4,2,6)\right| = \sqrt{56} = 7'48\, u^2$.

5.

Un vector perpendicular a $\vec{b}$ y a $\vec{c}$ se consigue haciendo el producto $\vec{b} \times \vec{c}$, así que una vez que tengamos las coordenadas de este vector, haremos que le hacemos que $\vec{a}$ sea paralelo a el..

$\vec{b} \times \vec{c} = \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \right) = (-2,-5,-11)$. Si $\vec{a}$ es paralelo a $\vec{b} \times \vec{c} \Rightarrow \dfrac{1}{-2} = \dfrac{-p}{-5} = \dfrac{q}{-11}$ y resolviendo las igualdades, se deduce que $p = -\dfrac{5}{2}$ y $q = \dfrac{11}{2}$

---

6. El lugar geométrico donde se encuentran todos los vectores $\vec{u}(a,b,c)$ perpendiculares al vector $\vec{v}(3,-3,-1)$ se obtiene haciendo $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{3a -3b –c=0 que es la ecuación de un plano}}$